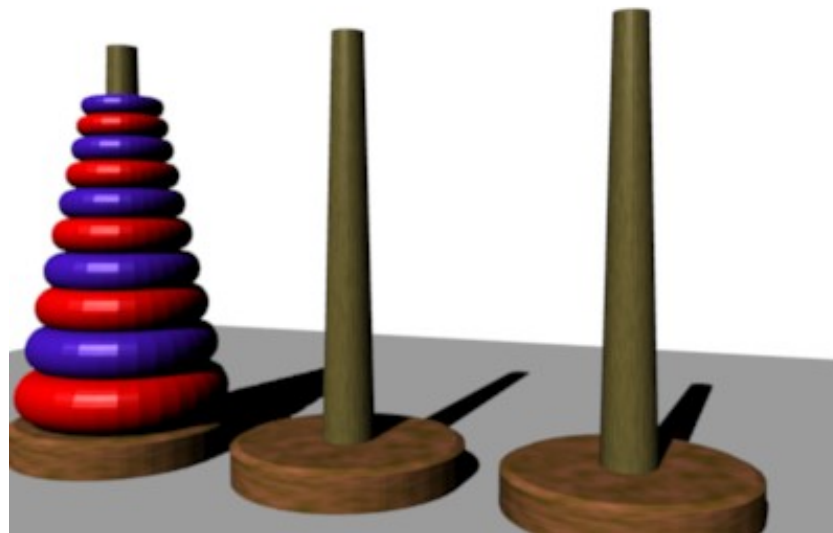


La Torre di Hanoi



Le Torri di Hanoi

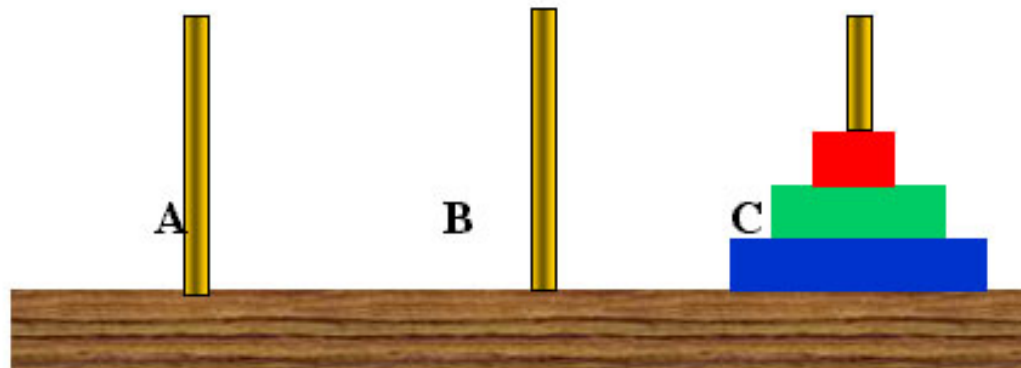
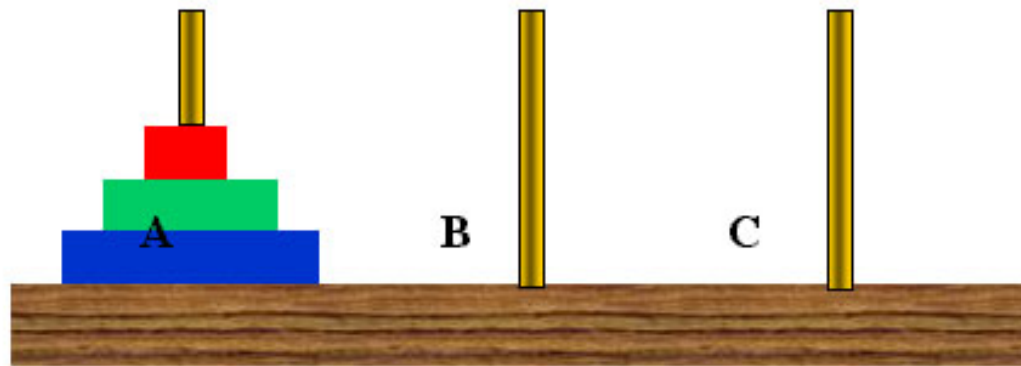
Il problema delle **Torri di Hanoi** deriva da una antica leggenda indiana che recita così: «nel grande tempio di Brahma a Benares, su di un piatto di ottone, sotto la cupola che segna il centro del mondo, si trovano **64 dischi d'oro puro** che i monaci spostano uno alla volta infilandoli in un ago di diamanti, seguendo l'immutabile legge di Brahma: **nessun disco può essere posato su un altro più piccolo**. All'inizio del mondo tutti i 64 dischi erano infilati in un ago e formavano la Torre di Brahma. Il processo di spostamento dei dischi da un ago all'altro è tuttora in corso. Quando l'ultimo disco sarà finalmente piazzato a formare di nuovo la Torre di Brahma in un ago diverso, allora **arriverà la fine del mondo** e tutto si trasformerà in polvere.»

Le Torri di Hanoi



Il problema delle **Torri di Hanoi** con tre dischi

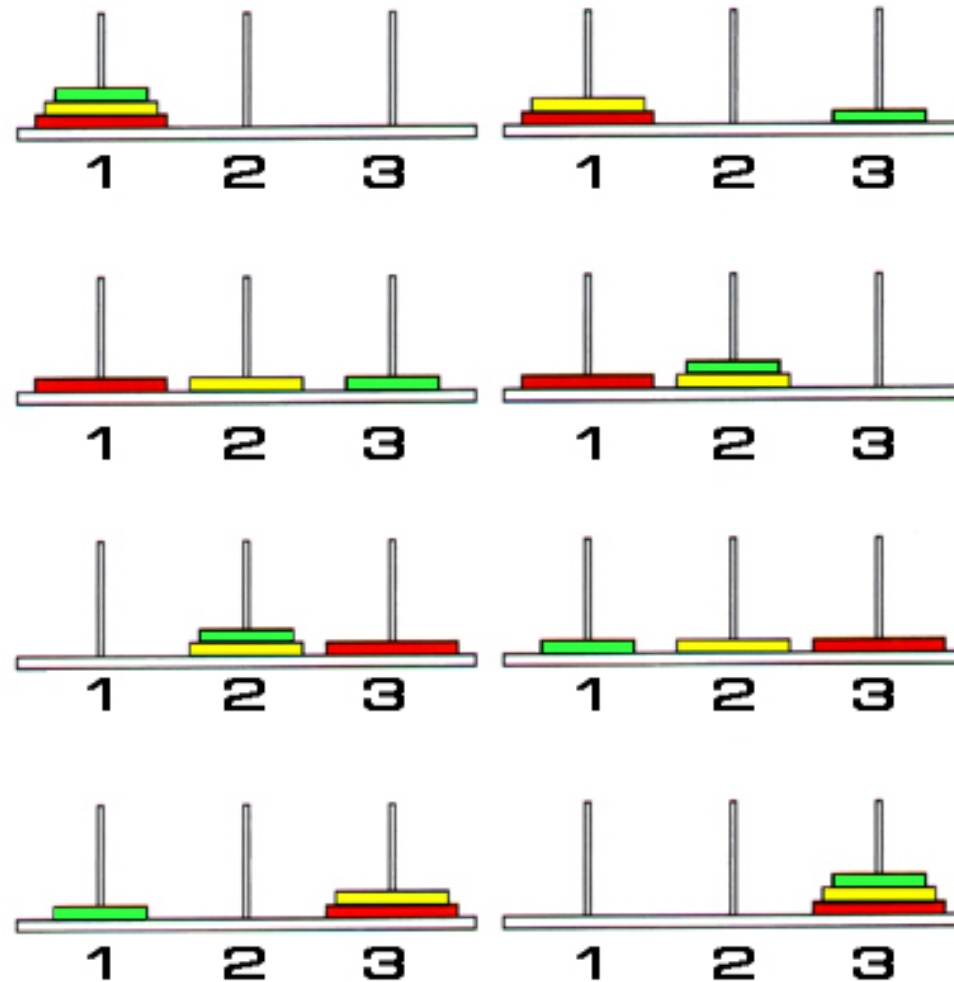
Le Torri di Hanoi



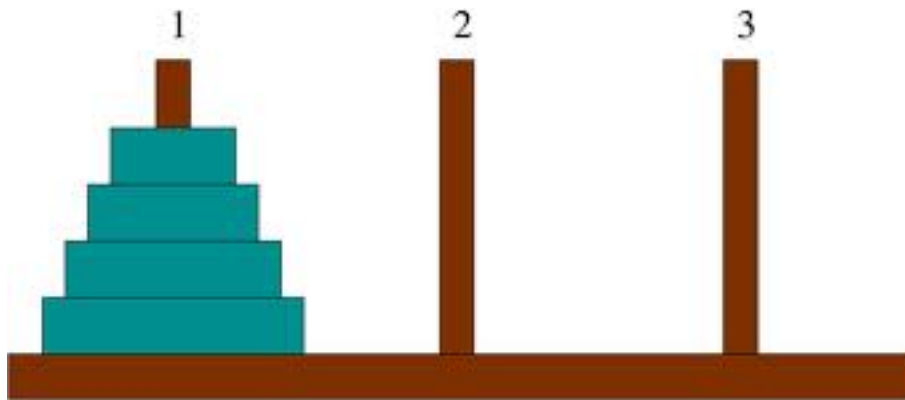
Configurazione iniziale e finale della *Torre di Hanoi* a tre dischi.

Le Torri di Hanoi

Soluzione del
problema delle **Torri
di Hanoi** con tre
dischi

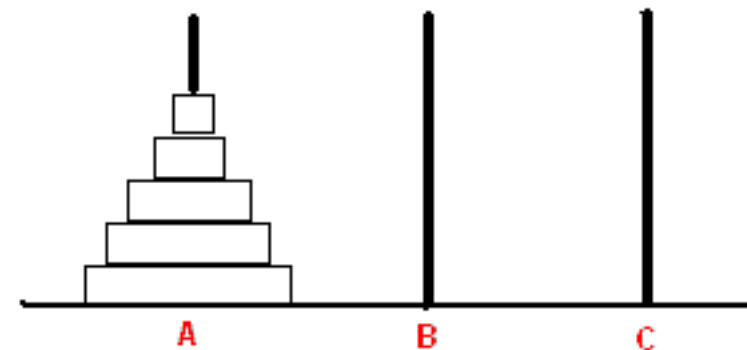


Le Torri di Hanoi



Problema delle **Torri di Hanoi** con quattro dischi

Problema delle **Torri di Hanoi** con cinque dischi



N.Dischi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mosse	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023

Soluzione: il Principio di Induzione

- Consideriamo una asserzione \mathcal{P} sull'intero n . Ad esempio:
 - $\mathcal{P}(n)$ = "La somma dei primi n numeri dispari è uguale a n^2 ."
- Si può dimostrare che $\mathcal{P}(n)$ è vera per tutti gli interi positivi n nel modo seguente:
 - si prova che $\mathcal{P}(1)$ è vera (base dell'induzione)
 - si prova che, se sono vere $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), \dots, \mathcal{P}(n)$ per un qualunque valore n , allora è vera anche $\mathcal{P}(n+1)$ (passo induttivo)

La stessa cosa si può fare ovviamente per dimostrare $\mathcal{P}(n)$ per tutti gli interi non-negativi: basta considerare come base $\mathcal{P}(0)$ anzichè $\mathcal{P}(1)$

- Per dare una dimostrazione per induzione matematica il primo passo è individuare su che cosa (su quale quantità) effettuare l'induzione.

Soluzione: il Principio di Induzione

- Completiamo l'esempio. Tesi: per ogni intero $n \geq 1$ vale $P(n)$, dove:
 - $P(n)$ = "La somma dei primi n numeri dispari è uguale a n^2 ."

- Dimostrazione:

– possiamo scrivere $P(n)$ come:
$$\sum_{k=1}^n (2 * k - 1) = n^2$$

– *Base dell'induzione*: $P(1)$ è vera, infatti $1 = 1^2$.

– *Passo induttivo*: Se $P(k)$ è vera per tutti i k da 1 a n , allora è vera in particolare per $k=n$, quindi possiamo assumere che $P(n)$ sia vera.

Dimostriamo che di conseguenza P è vera per $n+1$.

- Sommiamo $(2 * (n+1) - 1)$, cioè $(2 * n + 1)$ ai due lati di $P(n)$:

- il lato sinistro diventa ovviamente
$$\sum_{k=1}^{n+1} (2 * k - 1)$$

- per il lato destro: $n^2 + 2 * n + 1 = (n + 1)^2$ **CVD**

Soluzione: il Principio di Induzione

Per effettuare una dimostrazione per induzione matematica occorre:

- stabilire su quale quantità si applica l'induzione:
la lunghezza della sequenza dei primi numeri dispari
- esprimere il teorema nei termini della quantità su cui si applica l'induzione
 $P(n) = \text{"La somma dei primi } n \text{ numeri dispari è uguale a } n^2\text{."}$
- stabilire per quale valore della quantità su cui si applica l'induzione si ha la condizione base dell'induzione
sequenza dei primi numeri dispari di lunghezza 1
- dimostrare direttamente il teorema nella condizione base dell'induzione
- esplicitare l'ipotesi induttiva e il passo induttivo
Se $P(k)$ è vera per tutti i k da 1 a n , allora è vera per $k=n$, possiamo assumere che $P(n)$ sia vera. Bisogna di conseguenza dimostrare la verità di $P(n+1)$.
- dimostrare il passo induttivo
Quando si invoca l'ipotesi induttiva bisogna fare vedere che essa è applicabile.

Swi-prolog: un dimostratore automatico

Il **Prolog** è impiegato in molti programmi di **intelligenza artificiale**, la sua sintassi e la semantica sono molto semplici e chiare.

SWI-Prolog è un'implementazione open source del linguaggio di programmazione Prolog, comunemente usato per applicazioni in ambito di intelligenza artificiale e web semantico.

L'esecuzione di un programma Prolog è comparabile alla **dimostrazione di un teorema.**

Swi-prolog: il listato

```
%Torre di Hanoi
```

```
hanoi(N):-muovi(sinistro,centrale,destro,N).
```

```
muovi(A,_,C,1) :- write('muovi un disco dal piolo '), write(A),  
write(' al piolo '), write(C), nl.
```

```
muovi(A,B,C,N) :- N>1, PreN is N-1, muovi(A,C,B,PreN),  
muovi(A,B,C,1), muovi(B,A,C,PreN).
```

Le Torri di Hanoi: 3 dischi

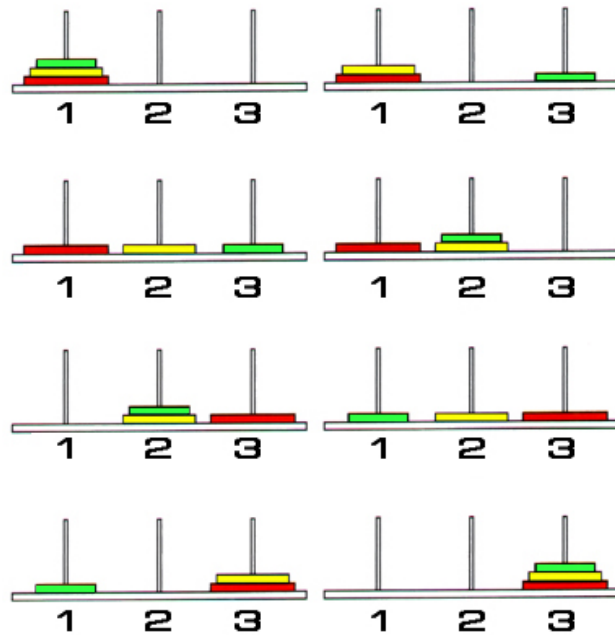
```
Terminale — swipl — 87x31
Last login: Fri May 25 07:49:43 on console
/opt/local/lib/swipl-6.0.2/bin/i386-darwin10.8.0/swipl ; exit;
macbook-pro-di-ivano-coccorullo:~ ivanococcorullo$ /opt/local/lib/swipl-6.0.2/bin/i386-
darwin10.8.0/swipl ; exit;
Welcome to SWI-Prolog (Multi-threaded, 64 bits, Version 6.0.2)
Copyright (c) 1990-2011 University of Amsterdam, VU Amsterdam
SWI-Prolog comes with ABSOLUTELY NO WARRANTY. This is free software,
and you are welcome to redistribute it under certain conditions.
Please visit http://www.swi-prolog.org for details.

For help, use ?- help(Topic). or ?- apropos(Word).

?- [hanoi].
% hanoi compiled 0.00 sec, 5 clauses
true.

?- hanoi(3).
muovi un disco dal piolo sinistro al piolo destro
muovi un disco dal piolo sinistro al piolo centrale
muovi un disco dal piolo destro al piolo centrale
muovi un disco dal piolo sinistro al piolo destro
muovi un disco dal piolo centrale al piolo sinistro
muovi un disco dal piolo centrale al piolo destro
muovi un disco dal piolo sinistro al piolo destro
true
```

Le Torri di Hanoi: 4 dischi



Terminale — swipl — 87x31

```
?- [hanoi].
```

```
% hanoi compiled 0.00 sec, 5 clauses  
true.
```

```
?- hanoi(3).
```

```
muovi un disco dal piolo sinistro al piolo destro  
muovi un disco dal piolo sinistro al piolo centrale  
muovi un disco dal piolo destro al piolo centrale  
muovi un disco dal piolo sinistro al piolo destro  
muovi un disco dal piolo centrale al piolo sinistro  
muovi un disco dal piolo centrale al piolo destro  
muovi un disco dal piolo sinistro al piolo destro  
true .
```

```
?- hanoi(4).
```

```
muovi un disco dal piolo sinistro al piolo centrale  
muovi un disco dal piolo sinistro al piolo destro  
muovi un disco dal piolo centrale al piolo destro  
muovi un disco dal piolo sinistro al piolo centrale  
muovi un disco dal piolo destro al piolo sinistro  
muovi un disco dal piolo destro al piolo centrale  
muovi un disco dal piolo sinistro al piolo centrale  
muovi un disco dal piolo sinistro al piolo destro  
muovi un disco dal piolo centrale al piolo destro  
muovi un disco dal piolo centrale al piolo sinistro  
muovi un disco dal piolo destro al piolo sinistro  
muovi un disco dal piolo centrale al piolo destro  
muovi un disco dal piolo sinistro al piolo centrale  
muovi un disco dal piolo sinistro al piolo destro  
muovi un disco dal piolo centrale al piolo destro  
true □
```

Le Torri di Hanoi: 5 dischi

Terminale — swipl — 87x34

```
?- hanoi(5).  
muovi un disco dal piolo sinistro al piolo destro  
muovi un disco dal piolo sinistro al piolo centrale  
muovi un disco dal piolo destro al piolo centrale  
muovi un disco dal piolo sinistro al piolo destro  
muovi un disco dal piolo centrale al piolo sinistro  
muovi un disco dal piolo centrale al piolo destro  
muovi un disco dal piolo sinistro al piolo destro  
muovi un disco dal piolo sinistro al piolo centrale  
muovi un disco dal piolo destro al piolo centrale  
muovi un disco dal piolo destro al piolo sinistro  
muovi un disco dal piolo centrale al piolo sinistro  
muovi un disco dal piolo destro al piolo centrale  
muovi un disco dal piolo sinistro al piolo destro  
muovi un disco dal piolo sinistro al piolo centrale  
muovi un disco dal piolo destro al piolo centrale  
muovi un disco dal piolo sinistro al piolo destro  
muovi un disco dal piolo centrale al piolo sinistro  
muovi un disco dal piolo centrale al piolo destro  
muovi un disco dal piolo sinistro al piolo destro  
muovi un disco dal piolo centrale al piolo sinistro  
muovi un disco dal piolo centrale al piolo destro  
muovi un disco dal piolo sinistro al piolo centrale  
muovi un disco dal piolo destro al piolo centrale  
muovi un disco dal piolo sinistro al piolo destro  
muovi un disco dal piolo centrale al piolo sinistro  
muovi un disco dal piolo centrale al piolo destro  
muovi un disco dal piolo sinistro al piolo destro  
true □
```

