Problema n. 2 : Il ghiaccio

Risoluzione

Punto 1)

La superficie totale del prisma retto a base quadrata è $A_S = 2 \cdot b^2 + 4 \cdot b \cdot h$

$$A_S = 2\, b^2 + 4\, b\, h \qquad \textbf{(1)}$$

Sapendo che il volume è $V = b^2 \cdot h$

$$V = b^2\, h \qquad \textbf{(2)}$$

Si ha : $10\, dm^3 = b^2\, h$

$$10\, dm^3 = b^2\, h \qquad \textbf{(3)}$$

Ricaviamo l'altezza in funzione di b

$$h = \frac{10\, dm^3}{b^2} \qquad \textbf{(4)}$$

$$A_S = 2 \cdot b^2 + \frac{4 \cdot b \cdot 10}{b^2}$$

$$A_S = 2\, b^2 + \frac{40}{b} \qquad \textbf{(5)}$$

Con b non negativo essendo la misura di un segmento .
Il C.E. della funzione è perciò b>0
In tale insieme non ci sono simmetrie evidenti .
Inoltre è una funzione sempre positiva, nel suo insieme di definizione, perchè somma di quantità sempre positive.
∄Intersezioni con gli assi.

$$\lim_{b \to 0+} \left(2\, b^2 + \frac{40}{b} \right) \qquad \textbf{(6)}$$

$\lim_{b \to 0+} \left(2\, b^2 + \frac{40}{b} \right) = +\infty$ Asintoto verticale b=0 da destra

$\lim_{b \to +\infty} \left(2\, b^2 + \frac{40}{b} \right) = +\infty$ ∄ asintoto orizzontale

$m = \lim_{b \to +\infty} \left(2\, b + \frac{40}{b^2} \right) = +\infty$ ∄ asintoto obliquo

Calcolo la derivata prima

$diff\left(2\,b^2+\frac{40}{b},b\right)$

$$4\,b-\frac{40}{b^2} \quad (7)$$

La pongo uguale a 0

$$0=\frac{4\,(b^3-10)}{b^2} \quad (8)$$

ottengo

$$\{10^{1/3}\le b\} \quad (9)$$

per b $> \sqrt[3]{10}$ la superficie cresce

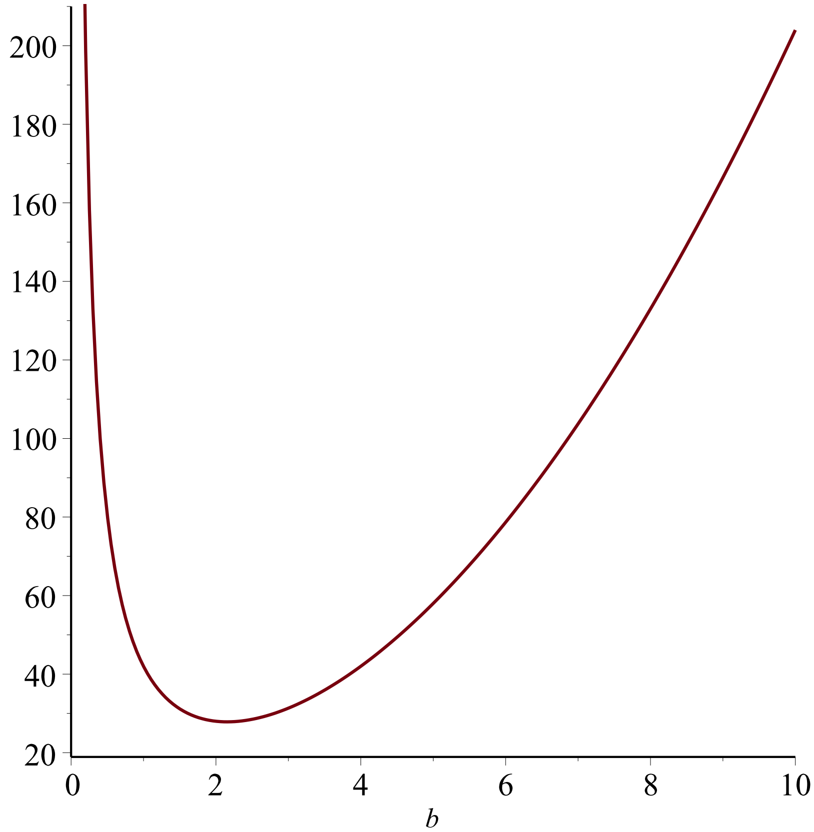
per $0\le b<\sqrt[3]{10}$ la superficie decresce

per **b** $=\mathbf{\sqrt[3]{10}}$ la superficie esposta sarà minima e vale

$$6\,10^{2/3} \quad (10)$$

$\min\left(\sqrt[3]{10},6\cdot\sqrt[3]{10^2}\right)$

$plot\left(2\cdot b^2+\frac{40}{b},b=0..10\right)$



Punto 2

Il blocco scambierà calore attraverso la superficie (prima ipotesi aggiuntiva, scambio solo per conduzione), supponendo che sia coinvolta tutta la superficie, anche quella relativa alla base di appoggio (seconda ipotesi aggiuntiva),
si ha:

$$A_S = 2 \cdot b^2 + \frac{4 \cdot b \cdot 10}{b^2}$$

$$A_S = 2\, b^2 + \frac{40}{b} \qquad \textbf{(11)}$$

Dal precedentemente studio di questa funzione abbiamo visto che per b = $\sqrt[3]{10}$ la superficie esposta sarà minima e conseguentemente sarà minimo lo scambio termico.

Per tale valore di b l'altezza del blocco sarà $h = \frac{10}{\left(\sqrt[3]{10}\right)^2}$

$$h = 10^{1/3} \tag{12}$$

Si può dedurre quindi che lo scambio termico sarà minimo quando il blocco avrà la forma di un cubo .

Punto 3

Poichè il blocco tende a riscaldarsi, in funzione della differenza di temperatura tra il ghiaccio e l'ambiente,

per determinare quale funzione modellizzi il processo, consideriamo le tre funzioni

$$T(t) = (T_g - T_a)e^{-Kt}$$

$$T(t) = (T_a - T_g).(1 - e^{-Kt}) + T_g$$

e

$$T(t) = (T_a - T_g)e^{-Kt} - T_a$$

mettiamo al posto di $T_g = -18°$, $T_a = 10°$ ed esaminiamo i modelli matematici forniti

nel primo caso si ha

$T(t) = -28 \cdot \exp(-t \cdot k)$

$$T(t) = -28\, e^{-tk} \tag{13}$$

verifichiamo se è soddisfatta la condizione iniziale per cui per t=0 la temperatura del ghiaccio deve essere -18°C

$T(0) = -28\, e^{-0 \cdot k}$

$$T(0) = -28 \tag{14}$$

la funzione **non verifica le condizioni iniziali**, calcoliamo anche le condizioni finali asintotiche per t --> ∞,

$\lim_{t \to +\infty} (-28 \cdot \exp(-t \cdot k)) = 0$

valore che **non corrisponde** al raggiungimento asintotico della temperatura ambiente (10°). **Funzione non adeguata a modellizzare il fenomeno.**

nel secondo caso si ha

$T(t) = 28 \cdot (1 - \exp(-t \cdot k)) - 18$

$$T(t) = 10 - 28\,e^{-t\,k} \tag{15}$$

la funzione è crescente infatti la sua derivata prima $T'(t) = 28\,k\,e^{-t\,k} \geq 0 \quad \forall t \in R$

verifichiamo se soddisfa la condizione iniziale

$T(0) = 10 - 28\,e^{-0 \cdot k}$

$$T(0) = -18 \tag{16}$$

La condizione iniziale è verificata, occorre verificare anche se sono soddisfatte le condizioni asintotiche finali:

$\lim_{t \to +\infty} (28 \cdot (1 - \exp(-t \cdot k)) - 18) = 10$

valore che **corrisponde** al raggiungimento asintotico della temperatura ambiente (10°). **Funzione adeguata a modellizzare il fenomeno.**

nel terzo caso (esaminato a verifica della correttezza del risultato precedente) si ha

$T(t) = 28 \cdot \exp(-t \cdot k) - 10$

$$T(t) = 28\,e^{-t\,k} - 10 \tag{17}$$

la sua derivata prima rispetto a t è

$T'(t) = -56\,e^{-t\,k} < 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ quindi la funzione è **sempre decrescente** e **quindi non adeguata a modellizzare il fenomeno**
perchè la temperatura cresce in un processo di riscaldamento (non occorre verificare le condizioni iniziali e finali asintotiche).

Scelta perciò la funzione $\boldsymbol{T(t) = 10 - 28\,e^{-t\,k}}$
affinchè il blocco non inizi a fondere nei 2 minuti necessari al percorso verso il camion frigorifero, deve essere verificata la condozione

$\boldsymbol{T(2) \geq 0^o}$

$10 - 28\,e^{-t\,k} \geq 0$

$e^{-t\,k} \geq \frac{10}{28}$

$$e^{-t\,k} \leq \frac{5}{14} \tag{18}$$

$e^{-t\,k} \leq \frac{5}{14}$

$-t \cdot k \leq \ln\left(\frac{5}{14}\right)$

per t=2

$k \geq -\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{5}{14}\right)$

$evalf\left(k \geq -\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{5}{14}\right), 2\right)$

$$0.50 \leq k \tag{19}$$

$\boldsymbol{k \geq 0.5}$

Punto 4

Per risolvere il quesito 4 calcoliamo il volume del recipiente avente la forma di tronco di cono

$V \approx \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(1.5^2 + 1 + 1.5\right) \cdot 2$

$$V \approx (3.166666666\,\pi) \tag{20}$$

$$V \approx (9.951) \tag{21}$$

Per calcolare il volume di acqua necessaria per produrre ciascun blocco vale la seguente espressione:

$V_a + \frac{V_a}{100} \cdot 9.05 = 10$

$$1.090500000\, V_a = 10 \tag{22}$$

$$V_a = 9.170105456 \tag{23}$$

Poichè $V_a \approx 9.17$ è minore del volume del recipiente $V \approx (9.951)$ quest'ultimo è in grado di contenere l'acqua necessaria a costruire il blocco di ghiaccio.

Poichè il volume del tronco di cono si ottiene con la formula $V = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{Pi} \cdot \left(\mathrm{R}^2 + \mathrm{r}^2 + \mathrm{r} \cdot \mathrm{R}\right) \cdot \mathrm{h}$ per trovare l'altezza raggiunta dall'acqua nel contenitore si ha $h = \dfrac{V}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\mathrm{R}^2 + \mathrm{r}^2 + \mathrm{r} \cdot \mathrm{R}\right)}$

$$h = \frac{9.17}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(1.5^2 + 1 + 1.5\right)}$$

$$h = \frac{5.791578949}{\pi} \tag{24}$$

$$h = 1.84 \tag{25}$$

L'acqua raggiungerà un'altezza dal fondo pari a 1,84 dm.